

## Ответ В. Ф. Журавлеву

А. В. Борисов

Институт компьютерных исследований  
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1  
borisov@rcd.ru

*От редакции. Обсуждаемая в полемической переписке А. В. Борисова и В. Ф. Журавлева тема о применимости различных моделей контактного взаимодействия тел важна сама по себе; многие имеющиеся здесь проблемы полностью не решены до сих пор. Положительно, что на страницах этого выпуска свое мнение по этим вопросам дали и другие авторы. Указанная тема остается открытой для обсуждения и в будущих выпусках «НД».*

Уважаемый Виктор Филиппович,

Из Вашего предыдущего ответа очевидно, что Вы остались на своей принципиальной позиции о несостоятельности неголономной модели качения и при намерении полностью заместить ее собственной моделью поликомпонентного сухого трения, основанной на теории Контенсу–Эрисмана. Об этом свидетельствует и Ваша недавно выпущенная книга [2]. К сожалению, наша дискуссия в этом отношении ничего не изменила. Кроме того, в Вашем последнем ответе, в основном, подвергнуты разбору отдельные слова и оговорки. При таком подходе научный спор вырождается в пустую, подменяющую дело, словесность. Поэтому настоящим письмом я хотел бы завершить (со своей стороны) нашу переписку. Уверен, по этим вопросам на страницах журнала еще будут опубликованы содержательные рассуждения.

Ниже я еще раз покажу, что Ваши чересчур категоричные утверждения, касающиеся неголономной механики, неверны и недопустимы. В значительной степени это делается для защиты тех читателей (в особенности, молодых) Ваших работ, кто еще верит в правильность всех утверждений, опубликованных в академических журналах.

Затрону сперва вопрос о явлении шимми — на него Вы указали в ответ на предложение опробовать свою теорию в решении принципиально новых содержательных задач и объяснить эффекты, которые другими моделями нигде не объясняются.

Предложенная Вами теория трения применяется для объяснения шимми в статьях [3, 4]. В них прямо говорится о несостоятельности неголономной постановки задачи о шимми и, соответственно, критикуется модель М. В. Келдыша [5], которая, как известно, является неголономной. В введении (оно почти одинаково для обеих статей) отмечается, с ссылкой на работу Келдыша, что:

*«общепринятым считается представление о том, что причиной шимми является деформация пневматика. <...> Не подвергая сомнению этот тезис, тем не менее заметим,*

что эта причина не единственна. Шимми можно наблюдать и в быту у разнообразных ручных колясок, где ссылка на упругость пневматика чаще всего неуместна, если колеса жесткие. <...> Ниже будет показано, что теория поликомпонентного сухого трения, оказавшаяся эффективной в динамике твердых тел, вполне объясняет шимми для жестких колес и, следовательно, является по крайней мере одной из основных причин шимми в общем случае. Причиной игнорирования сухого трения исследователями в объяснении шимми была неразвитость представлений об этом трении до настоящего времени, а объяснить шимми в рамках прежних представлений не удавалось».

Данные высказывания совершенно некорректны по отношению к работе М.В. Келдыша и вообще всему тому, что было достигнуто в изучении шимми ранее.

У М.В. Келдыша [5] деформация пневматика отнюдь не является единственной или главной причиной шимми. Задачей М.В. Келдыша было разработать наиболее точную модель, позволяющую разрешить жизненно важную для авиации страны техническую проблему — устранение причин шимми в шасси самолетов. Для выявления феноменологии шимми в самолетах и установления физических предпосылок своей теории им был проработан обширнейший экспериментальный материал. В его модели учитывается не только деформация пневматика, но и также ряд других существенных факторов (упругость стойки, вынос колеса и т. д.), и исследовано их удельное влияние в явлении шимми. На основе этих результатов М.В. Келдышем были сформулированы конкретные рекомендации конструкторам, позволившие решить проблему на практике. В этом отношении работа М.В. Келдыша [5] неоценима и незаменима.

В Ваших работах неголономная модель качения, использованная в [5], без каких-либо обоснований объявляется несостоятельной. Взамен предложена некая теоретическая гипотеза, основанная на предлагаемой поликомпонентной теории трения, и получено некое условие, выполнение которого на практике еще нужно проверять. В качестве доказательства приводится рисунок в книге [2], представляющий собой теоретическую кривую, наложенную на экспериментальные данные. При этом точность эксперимента настолько низка, что из этого рисунка совершенно непонятно, чем объясняется выбор именно этой кривой (в зависимости от метода подгонки там можно практически любую кривую подогнать). Для конструктора, инженера, работающего на производство, польза предлагаемого решения и приведенных графиков сомнительна. Сказанным довольно ясно определяется различие в уровне исследований [5] и [3, 4].

Вы упоминаете, что «на ошибочность неголономного условия Келдыша в этой задаче указывал Н. А. Фуфаев». С другой стороны, в имеющихся печатных работах Н. А. Фуфаева ничего подобного нет. В его совместных с Ю.И. Неймарком исследованиях по динамике баллонных колес [6, 7] теория Келдыша берется за основу. Более того, из ученых, занимавшихся неголономной механикой после С. А. Чаплыгина, Н. А. Фуфаев был одним из самых выдающихся специалистов, фактически лидером этой дисциплины в нашей стране.

Читателям работ [3, 4] дается понять, что другие исследователи вообще не преуспели в понимании этого явления. Однако изучению шимми колес различных транспортнх средств посвящены сотни работ. Разработаны реалистичные модели различной сложности, проверенные численными расчетами и лабораторными экспериментами, среди них как чисто неголономные, так и комбинированные. Этим вопросам, в частности, посвящена замечательная систематическая книга Г.Пасейки [8]. Достойны внимания, например, исследования G.Stépàn (см. [9, 10, 11, 12] и другие работы этой школы), который решил задачу для твердых колес в чисто неголономной постановке, а также развил более детальные модели со сложным динамическим поведением, учитываю-

щие, в частности, доминирующее влияние сухого трения при определенных динамических режимах.

Природа шимми может быть весьма разнообразна, поэтому целесообразность применения той или иной модели, степень и характер ее конкретизации обуславливаются конкретными условиями задачи, тем, какого рода особенности явления требуется изучить. Неразвитость представлений о сухом трении тут ни при чем. Вопрос о влиянии проскальзывания на шимми должен решаться путем эксперимента и зависит от вида и размера транспортного средства, типа и толщины колес, состояния дорожного покрытия. Неправильно распространять одну модель на все случаи, а о других говорить, что они несостоятельны. Использование Вашей сложной модели трения нецелесообразно, например, в случае тонких колес. Говорить о каком-то пятне контакта и постулировать распределение напряжений в этом случае неуместно.

Упомяну еще две известные задачи из динамики твердого тела — о волчке Томсона и кельтском камне, в отношении которых Вы утверждаете, также неверно, что впервые правильно объяснили динамические эффекты, наблюдающиеся в этих системах, с помощью своей теории. И эти задачи уже были решены ранее, начиная с классиков, и вполне корректным образом: имеется качественное объяснение их основных динамических закономерностей, за счет каких факторов происходят эти эффекты. В своих работах Вы провели новые численные эксперименты и показали, что предложенная теория тоже приводит к перевороту волчка и реверсу кельтского камня. Но к известной качественной картине движения в этих задачах ничего нового при этом не добавилось. Точные сложные модели нужны. Но чтобы утверждать, что Ваши модели упомянутых задач действительно более точно описывают динамические явления, нужно подкрепить их основательной экспериментальной базой. Например, как это сделано у М. В. Келдыша при создании более точной модели шимми с учетом пневматика. Ваши модели такой экспериментальной базы пока не имеют. Если же Вы считаете, что дали количественное объяснение, то это тем более требует тщательной экспериментальной проверки. Ни одна теоретическая модель не даст точного количественного описания переворота волчка Томсона и при проверке экспериментом она будет корректироваться.

Можно сколь угодно много писать о принципиальной неприменимости неголономных постановок. Современные технические достижения свидетельствуют об обратном. Последние десятилетия в мире бурно развивается направление, связанное с моделированием и созданием так называемых мобильных роботов. Большинство роботов такого типа создается именно на основе моделей из неголономной механики, то есть при классическом условии непроскальзывания. Качение без проскальзывания — это и есть основное движение робота в нормальном, безаварийном режиме. Для такого режима неголономная механика применима вполне, и это показано в сотнях работ, сочетающих в себе экспериментальную и теоретическую компоненты. Более того, именно для такого режима разработаны современные методы управления движением. Теория управления в робототехнике ориентирована на системы с неголономными связями. Благодаря именно неголономности связей система оказывается вполне управляемой (согласно теореме Рашевского–Чжоу). Движение без связей при наличии скольжения — это отдельный режим, требующий особого анализа. В робототехнике он, как правило, является нештатным, аварийным. Если мы хотим управлять движением, то следует рассматривать именно систему со связями, что и делается в большинстве работ.

Никто не утверждает, что неголономная механика универсальна и описывает все явления, связанные с качением и контактным взаимодействием твердых тел. Как и все модели в механике — взять хотя бы теорию идеальной жидкости, гамильтонову механику, — она

конечно, не является точной. Однако, как и эти модели, неголономная механика обладает простотой, проработанностью, существенной развитостью. Поэтому она берется за основу при описании очень многих типичных динамических систем, и такой подход полностью оправдывает себя на практике. Решение Келдышем проблемы шимми — ярчайший тому пример. Главное — уместное применение этой модели (как и любой другой), с учетом условий движения, материалов соприкасающихся поверхностей, и т. д.

Для того, чтобы не повторяться в этом сообщении, я рекомендую заинтересованным читателям прочесть раздел «Дискуссия» в [1], где вопросы применимости той или иной модели контактного взаимодействия обсуждаются в более систематической и аргументированной форме. Подчеркиваю, что авторами [1] не отрицаются сложные теории трения — критике подвергнута лишь односторонность подхода, заключающегося в распространении подобной теории на все задачи качения тел и попутном отрицании упрощенных моделей трения и неголономных постановок задач, и, соответственно, огромного пласта результатов, принадлежащих выдающимся ученым. Тем более, если подобная теория не имеет основательной экспериментальной базы и не апробирована на практике.

Предложенная Вами поликомпонентная теория трения, основанная на теории Контенсу–Эрисмана, вызывает множество вопросов, и предлагать ее взамен других без экспериментального подтверждения нельзя. Так, в этой модели не известно ни пятно контакта, ни распределение нагрузки; фактически, интегрируется неопределенная функция по неопределенной площади. Законы трения являются приближенным, и, в частности, когда возникает пятно контакта, то появляется множество динамических эффектов, которые сложно отследить. Теоретически можно строить множество моделей, которые приведут к какому-то результату; например, один из образцов построен в статье [13], автор при этом верно отмечает, что полученные выводы нуждаются в экспериментальной проверке.

Не могу согласиться с Вашим мнением по поводу парадоксов Пенлеве. Научная дискуссия по этим вопросам велась знаменитыми классиками (см. [15, с. 221]). Замечу, что никто из вступивших в полемику, соглашаясь либо нет с выводами Пенлеве, не отрицал важности затронутых им вопросов. Участниками дискуссии были введены различные предположения и гипотезы; каждый при этом указывал на необходимость экспериментального исследования. К сожалению, в то время в необходимой мере это выполнено не было. С моей точки зрения, на сегодняшний день теоретические рассуждения о парадоксах Пенлеве — это философская дискуссия. Вопросы подобного рода разрешаются не спорами, а только экспериментом.

Бесспорно, нужно глубже изучать явление динамического трения, проводить экспериментальные исследования и развивать уточненные теории. Следуя примеру Кулона, необходимо ставить, уже на современной стадии, опыты при различных условиях движения, разных материалах соприкасающихся тел. Надеюсь, настоящая дискуссия послужит определенным стимулом для нового продвижения в этих вопросах.

PS. Кстати говоря, любопытно, что из Вашей модели, если даже считать ее более точной, можно получить стандартную неголономную модель качения, воспользовавшись предельным переходом, когда пятно контакта стремится к нулю, а коэффициент трения достаточно велик [14]. Другим предельным переходом может быть получена модель «резинового» тела.

## Список литературы

- [1] Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 223–280.



- [2] Андронов В. В., Журавлёв В. Ф. Сухое трение в задачах механики. М.–Ижевск: ИКИ, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 184 с.
- [3] Журавлёв В. Ф., Климов Д. М. О механизме явления шимми // Докл. РАН, 2009, т. 428, вып. 6, с. 761–765.
- [4] Журавлёв В. Ф., Климов Д. М. Теория явления шимми // Изв. РАН. МТТ, 2010, № 3, с. 22–29.
- [5] Келдыш М. В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси // Тр. ЦАГИ, 1945, т. 564, с. 1–34.
- [6] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. К вопросу о путевой устойчивости экипажей на баллонных колесах // Докл. АН СССР, 1966, т. 170, вып. 3, с. 533–536.
- [7] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Устойчивость криволинейного движения экипажа на баллонных колесах // ПММ, 1971, т. 36, с. 899–907.
- [8] Pacejka H. B. Tyre and Vehicle Dynamics. 2nd Edn. London: Butterworth-Heinemann, 2006. 637 p.
- [9] Stépán G. Chaotic motion of wheels // Vehicle Syst. Dyn., 1991, vol. 20, no. 6, pp. 341–351.
- [10] Stépán G. Delay, nonlinear oscillations and shimmying wheels // Applications of nonlinear and chaotic dynamics in mechanics / F. C. Moon. Dordrecht: Kluwer, 1998. P. 373–386.
- [11] Takács D., Stépán G. Experimental study of the shimmy motion of wheels // 22nd Danubia-Adria Symposium on Experimental Methods in Solid Mechanics (Parma, Italy, 2005): Online-Proc. <http://cdm.unipr.it/das2005/papers/10.pdf>.
- [12] Takács D., Stépán G. Experiments on quasiperiodic wheel shimmy // J. Comput. Nonlinear Dynam., 2009, vol. 4, 031007, 7 p.
- [13] Козлов В. В. Лагранжева механика и сухое трение // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 855–868.
- [14] Козлов В. В. Замечания о сухом трении и неголономных связях // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 903–906.
- [15] Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: ГИТТЛ, 1954.

15 ноября 2010 г.